v. 1.01 28/04/09 ***IPSIA "Antonio Pacinotti" - Pistoia***

Sviluppo in serie di Fourier

Analisi nel dominio del tempo

Laboratorio di Sistemi

Classe IV - Studio dei segnali Gualtiero Lapini

Sviluppo in serie di Fourier

Analisi nel dominio del tempo

Scopo dell'esercitazione: Analizzare i principali segnali periodici (forme d'onda) utilizzate in elettronica.

Procedimento: Utilizzare Pspice per ricomporre i principali segnali periodici secondo la teoria dello sviluppo in serie di Fourier.

Partiamo come al solito dalla definizione di questo teorema come abbiamo visto nelle lezioni di teoria.

L'enunciato di Fourier afferma: *"Qualunque segnale periodico è scomponibile nella somma di un eventuale termine costante (corrispondente al valore medio del segnale) e di una serie (in genere infinita) di segnali sinusoidali dei quali uno ha la stessa frequenza del segnale considerato (prima armonica o fondamentale) e gli altri hanno frequenze multiple intere (armoniche superiori) con ampiezze via via decrescenti".*

Questa esercitazione ha appunto lo scopo di visualizzare il principio affermato da Fourier. A questo scopo creiamo alcuni dei principali segnali periodici che sono comuni in elettronica: dente di sega, onde rettangolari o quadre e triangolari.

Prima di partire ricordiamo alcune cose, l'enunciato di Fourier si può esprimere con la seguente espressione:

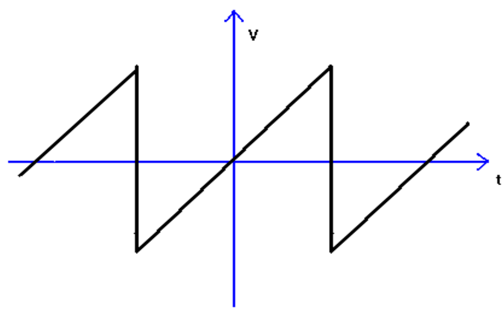
$$y_{(t)} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + b_n \cdot sen(n \cdot \omega \cdot t)]$$

nella quale il termine costante a_o rappresenta il valor medio del segnale $y_{(t)}$, mentre a_n e b_n sono i termini moltiplicativi, via via decrescenti, delle funzioni seno e coseno a frequenze via via crescenti.

Se il segnale ha valor medio nullo, ossia è un segnale *"alternato"*, il termine noto avrà valore nullo. Se la funzione poi è *"dispari"*, ossia è simmetrica rispetto all'origine degli assi, sono nulli i termini coseno. Nei altri casi i segnali possono essere di tipo *"unipolare"* o *"bipolare",* di tipo *"pari"* oppure *"né pari né dispari".* Per ulteriori chiarimenti si può consultare la nota esplicativa alla fine di questo documento.

Onda a Dente di Sega (Saw-Tooth)

Il segnale che vogliamo rappresentare è il seguente, si tratta quindi di un segnale ***bipolare*** o ***alternato*** (non ha quindi termine noto), inoltre è di tipo ***dispari*** (non ha quindi i termini di tipo coseno ma solo quelli di tipo seno).



Evitando la parte puramente matematica che è di particolare complessità arriviamo subito all'espressione che rappresenta il segnale desiderato, cioè alla sommatoria di una serie infinita di termini.

Secondo l'enunciato di Fourier quindi l'onda a dente di sega si può rappresentare con questa serie

$$y_{(t)}=\frac{2}{\pi}\cdot V_A\cdot[sen(\omega\cdot t)-\frac{1}{2}\cdot sen(2\cdot\omega\cdot t)+\frac{1}{3}\cdot sen(3\cdot\omega\cdot t)-\frac{1}{4}\cdot sen(4\cdot\omega\cdot t)+.....]$$

osserviamo che i termini sono alternativamente positivi e negativi ed hanno frequenze crescenti ed ampiezze decrescenti. Possiamo quindi ricreare questo segnale con una serie di generatori sinusoidali, collegati in serie e che sommano i loro contributi per generare il segnale finale. E' preferibile mettere tutti i generatori in serie rispettando le polarità e quindi mettere il segno negativo al valore da attribuire all'ampiezza, in modo da sottrarre il suo contributo dalla serie.

Per comodità riportiamo in una tabella i valori da attribuire ai vari parametri dei generatori.

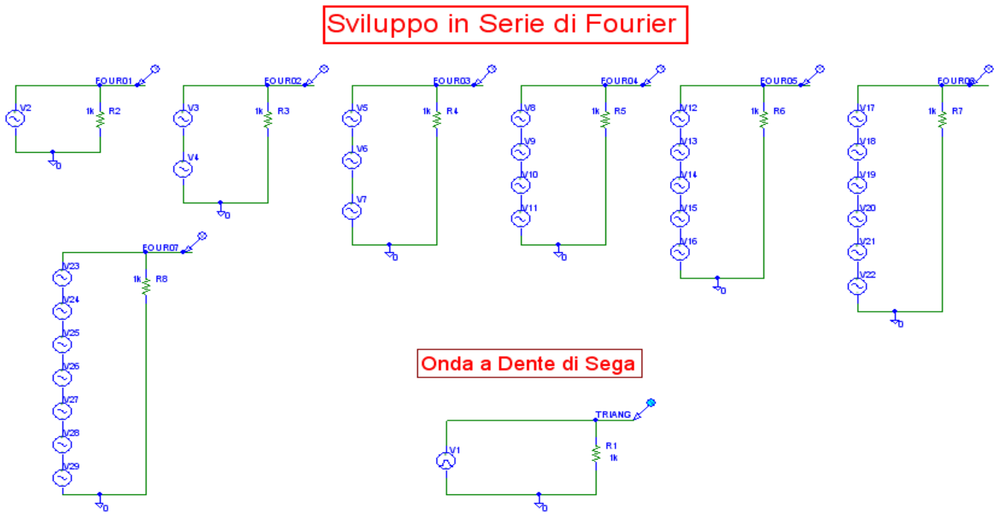
Generatore	***Ampiezza***	***Frequenza***	***Fase***	***Offset***	***Note***
V1	+3,183 V	1 KHz	0°	0 V	Fondamentale
V2	- 1,592 V	2 KHz	0°	0 V	Seconda armonica
V3	+ 1,061 V	3 KHz	0°	0 V	Terza armonica
V4	- 0,796 V	4 KHz	0°	0 V	Quarta armonica
V5	+ 0,637 V	5 KHz	0°	0 V	Quinta armonica
V6	- 0,531 V	6 KHz	0°	0 V	Sesta armonica
V7	+ 0,455 V	7 KHz	0°	0 V	Settima armonica

Questi valori sono stati calcolati per una forma d'onda a dente di sega con periodo di 1 msec e quindi frequenza di 1 Khz ed ampiezza di 5 volt, che in Pspice significa che la tensione varia da -5V a +5V.

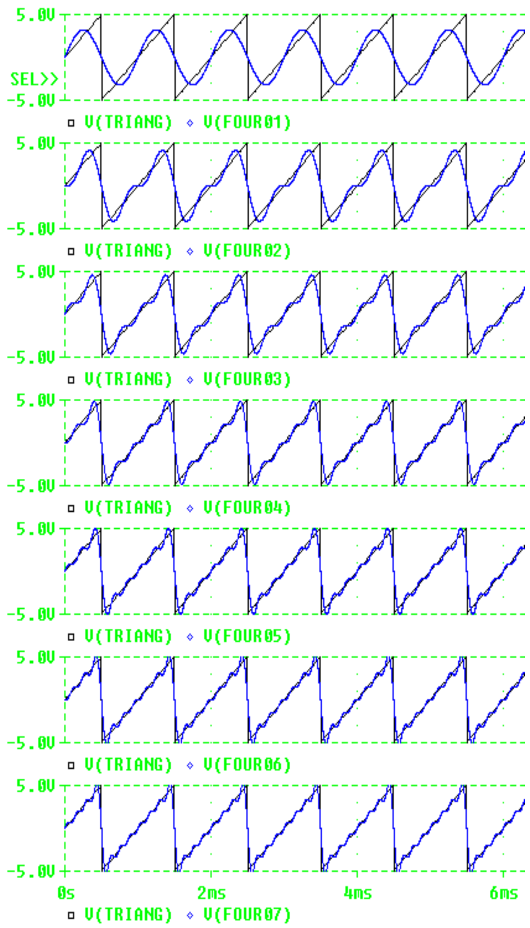
Per generare il segnale di riferimento utilizziamo un generatore VPULSE impostando questi parametri:

Parametro	***Valore***	***Descrizione***
V1	-5 [V]	Livello di partenza del segnale
V2	+5 [V]	Livello finale del segnale
TD	-0.5m [sec]	Istante di partenza del segnale. Corrisponde a T/2 prima dell'istante zero, per riuscire ad ottenere la forma d'onda desiderata
TR	1 m [sec]	Tempo di salita del segnale (praticamente identico al periodo del segnale stesso)
TF	1 p [sec]	Tempo di discesa del segnale (non può essere zero perché PSPice segnala errore, ma deve essere molto piccolo perché il segnale scende rapidamente)
PW	1p [sec]	Durata del segnale a livello alto (non può essere zero per la stessa ragione indicata sopra, ma deve essere molto piccolo)
PER	1m [sec]	Periodo del segnale, dopo questo tempo il segnale si ripete identico nel tempo

Per osservare meglio il procedere della serie di somme è conveniente utilizzare nello schema vari circuiti come illustrato in figura, si vedrà così il segnale a dente di sega da creare come risultato finale (questo segnale è generato da VPULSE) e si vedranno anche i risultati della sommatoria con un solo termine della serie, quindi con due termini, con tre termini e così via.



Lanciamo la simulazione e vediamone il risultato, sovrapponendone opportunamente i vari risultati intermedi.



Come si può vedere, via via che si aggiungono termini alla serie la forma d'onda risultante (in colore blu) si approssima sempre di più alla forma a dente di sega (in colore nero) che volevamo realizzare.

Possiamo quindi affermare che la dimostrazione del teorema dello sviluppo in serie di Fourier è pienamente riuscita.

In rete si trovano vari esercizi, testi e materiali riguardanti questo argomento, uno dei più "simpatici" ed efficaci è, a mio avviso, quello che si trova a questo indirizzo Internet:

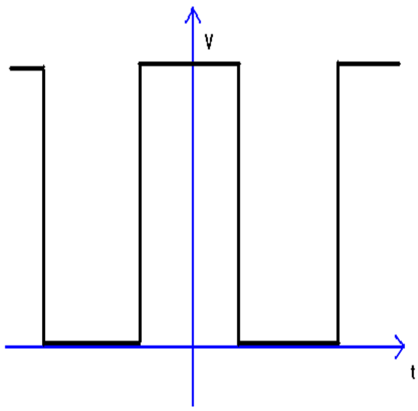
http://www.falstad.com/fourier/e-sawtooth.html

riguarda espressamente la forma d'onda a dente di sega, si tratta di un applet in linguaggio Java, cioè di un programmino in cui si possono modificare alcuni parametri e vedere, in tempo reale, il risultato grafico.

In questo esempio c'è addirittura la possibilità di "udire" il segnale risultante, vi invito quindi a sperimentarlo subito, cliccando sul link indicato sopra.

Onda Quadra o Rettangolare

Il segnale che vogliamo rappresentare è il seguente, si tratta quindi di un segnale ad onda quadra ***unipolare*** (ha quindi un termine noto a sommare), di tipo ***pari*** perché è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate (ha quindi solo i termini di tipo coseno).



La funzione risultante del segnale desiderato è quindi rappresentata dalla seguente sommatoria nella quale come al solito i vari coefficienti hanno alternativamente il segno positivo e quello negativo.

Da notare che nella serie abbiamo solo le armoniche dispari della fondamentale.

$$y_{(t)} = \frac{V_A}{2} + \frac{2 \cdot V_A}{\pi} \cdot [\cos(\omega \cdot t) - \frac{1}{3} \cdot \cos(3 \cdot \omega \cdot t) + \frac{1}{5} \cdot \cos(5 \cdot \omega \cdot t) - \frac{1}{7} \cdot \cos(7 \cdot \omega \cdot t) + ...]$$

Come nel caso precedente per comodità riportiamo in una tabella i valori da attribuire ai vari parametri dei generatori. Da notare che la fase è sempre 90° trattandosi di termini coseno e che l'offset del primo generatore corrisponde al valore del termine noto, ossia al valore medio del segnale risultante. Ricordiamoci anche della differenza dei termini per onda quadra (duty cycle del 50%) e rettangolare (duty cycle diverso dal 50%).

Fermiamoci anche qui al 7° elemento della sommatoria, come approssimazione può essere più che sufficiente.

Generatore	***Ampiezza***	***Frequenza***	***Fase***	***Offset***	***Note***
V1	+ 3,183V	1 KHz	90°	2.5V	Fondamentale
V3	- 1,061V	3KHz	90°	0 V	Terza armonica
V5	+ 0,637V	5 KHz	90°	0 V	Quinta armonica
V7	- 0,455V	7KHz	90°	0 V	Settima armonica
V9	+ 0,354V	9 KHz	90°	0 V	Nona armonica
V11	- 0,289V	11KHz	90°	0 V	Undicesima armonica
V13	+ 0,245V	13 KHz	90°	0 V	Tredicesima armonica

Questi valori sono stati calcolati per una forma d'onda quadra con periodo di 1 msec e quindi frequenza di 1 Khz ed ampiezza di 5 volt, utilizziamo quindi un generatore VPULSE impostando questi parametri:

Parametro	***Valore***	***Descrizione***
V1	O [V]	Livello di partenza del segnale
V2	+5 [V]	Livello finale del segnale
TD	-0.25m [sec]	Istante di partenza del segnale. Corrisponde a T/4 prima dell'istante zero, per riuscire ad ottenere la forma d'onda desiderata
TR	1 p [sec]	Tempo di salita del segnale (non può essere zero perché PSPice segnala errore, ma deve essere molto piccolo perché il segnale scende rapidamente)
TF	1 p [sec]	Tempo di discesa del segnale (vedere nota nel rigo sopra)
PW	0.5 m [sec]	Durata del segnale a livello alto (corrisponde a metà periodo, avendo un Duty Cycle del 50%)
PER	1m [sec]	Periodo del segnale, dopo questo tempo il segnale si ripete identico nel tempo

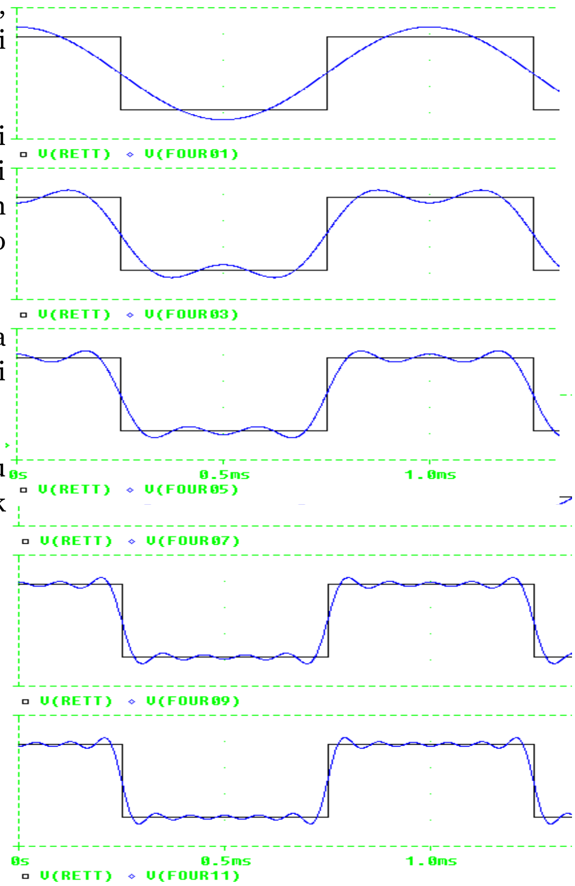
Lanciamo la simulazione e vediamone il risultato, sovrapponendone opportunamente i vari risultati intermedi.

Come si può vedere, via via che si aggiungono termini alla serie la forma d'onda risultante (in colore blu) si approssima sempre di più alla forma d'onda quadra (in colore nero) che volevamo realizzare. Nonostante siano stati utilizzati solo 6-7 termini il risultato è eccellente.

Possiamo quindi affermare che, anche in questo caso, la dimostrazione del teorema dello sviluppo in serie di Fourier è pienamente riuscita.

Come nel caso precedente vi invito a "provare" su Internet anche questa forma d'onda, cliccando sul link seguente:

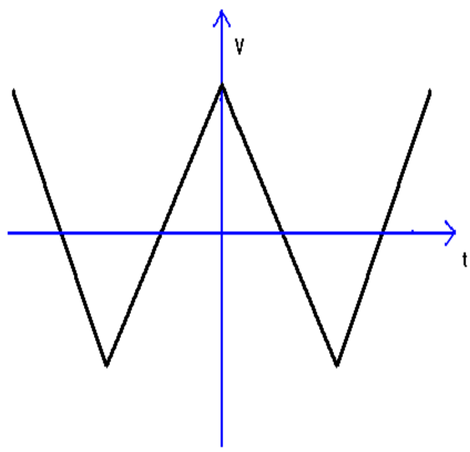
http://www.falstad.com/fourier/e-square.html



Proviamo adesso con l'ultima forma d'onda che avevamo annunciato:

Onda Triangolare

Il segnale che vogliamo rappresentare è il seguente, si tratta quindi di un segnale ***bipolare alternato*** (non ha quindi un termine noto a sommare), inoltre è di tipo ***pari*** perché è simmetrico rispetto all'asse verticale (ha quindi solo i termini di tipo coseno).



La funzione risultante del segnale desiderato è quindi rappresentata dalla seguente sommatoria nella quale notiamo che le ampiezze vanno rapidamente decrescendo poiché al denominatore compare il termine n^2, dove n è rappresentato solo dai coefficienti dispari.

Anche in questo caso nella serie abbiamo solo le armoniche dispari della fondamentale.

$$y_{(t)}=\frac{8\cdot V_A}{\pi^2}\cdot[\cos(\omega\cdot t)+\frac{1}{9}\cdot\cos(3\cdot\omega\cdot t)+\frac{1}{25}\cdot\cos(5\cdot\omega\cdot t)+\frac{1}{49}\cdot\cos(7\cdot\omega\cdot t)+.....]$$

Come nel caso precedente per comodità riportiamo in una tabella i valori da attribuire ai vari parametri dei generatori. La fase è sempre 90° trattandosi di termini coseno e che l'offset del primo generatore corrisponde al valore del termine noto, ossia al valore medio del segnale risultante.

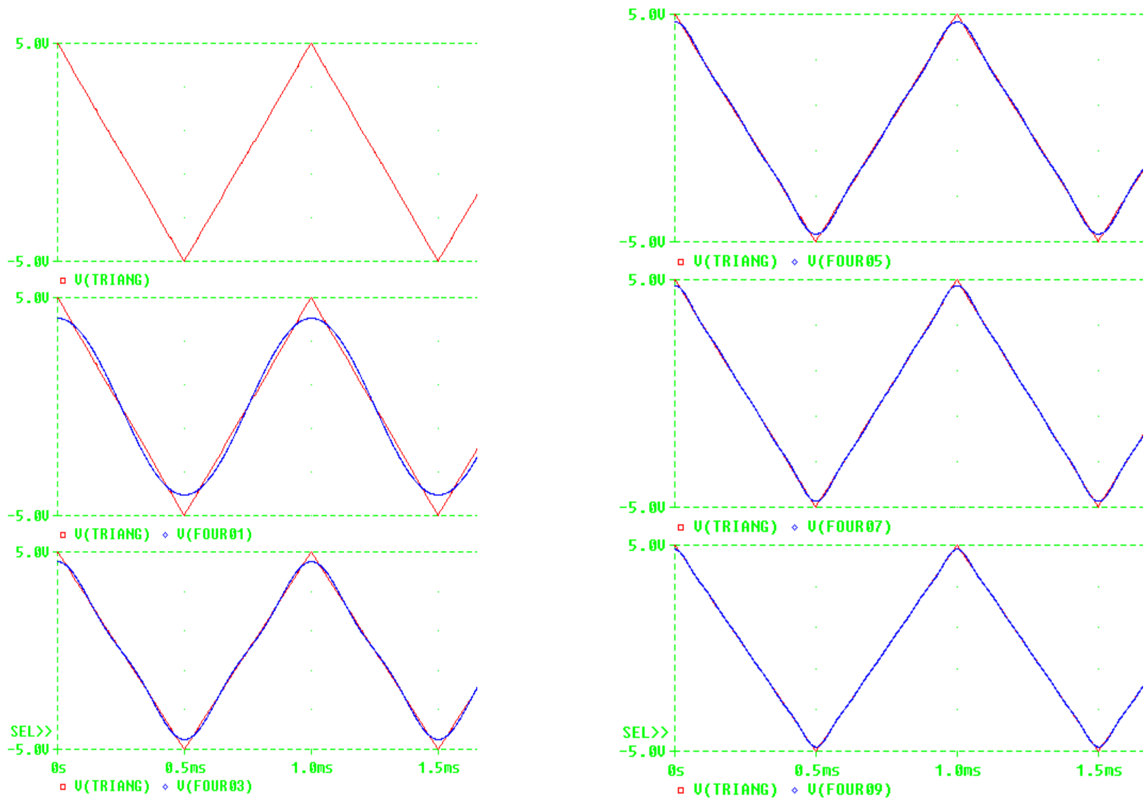
In questo caso possiamo fermarci molto prima, ad esempio al 5° elemento della sommatoria, come approssimazione può essere più che sufficiente, visto che l'ampiezza qui cala molto velocemente.

Generatore	***Ampiezza***	***Frequenza***	***Fase***	***Offset***	***Note***
V1	+4.053 V	1 KHz	90°	0 V	Fondamentale
V3	+0.450 V	3KHz	90°	0 V	Terza armonica
V5	+0.162 V	5 KHz	90°	0 V	Quinta armonica
V7	+0.083 V	7KHz	90°	0 V	Settima armonica
V9	+0.050 V	9 KHz	90°	0 V	Nona armonica

Questi valori sono stati calcolati per una forma d'onda triangolare con periodo di 1 msec e quindi frequenza di 1 Khz ed ampiezza che spazia dai -5 V ai +5 V, utilizziamo quindi un generatore VPULSE impostando questi parametri:

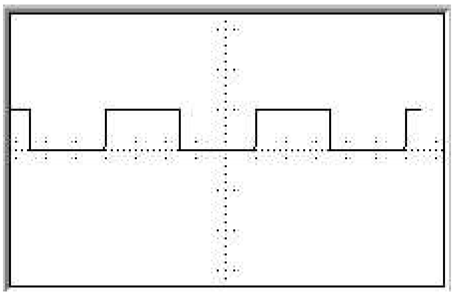
Parametro	***Valore***	***Descrizione***
V1	-5 [V]	Livello di partenza del segnale
V2	+5 [V]	Livello finale del segnale
TD	-0.5m [sec]	Istante di partenza del segnale. Corrisponde a T/2 prima dell'istante zero, per riuscire ad ottenere la forma d'onda desiderata
TR	0.5 m [sec]	Tempo di salita del segnale (corrisponde a T/2)
TF	0.5m [sec]	Tempo di discesa del segnale (corrisponde a T/2)
PW	1p [sec]	Durata del segnale a livello alto (non può essere zero altrimenti Pspice segnala un errore di calcolo)
PER	1m [sec]	Periodo del segnale, dopo questo tempo il segnale si ripete identico nel tempo

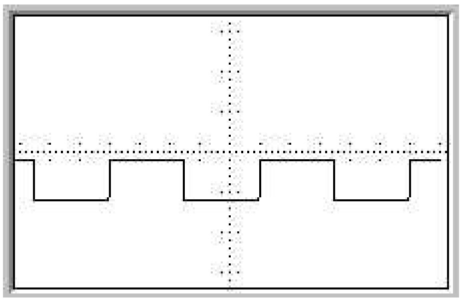
Lanciamo la simulazione e vediamone il risultato, sovrapponendone opportunamente i vari risultati, anche in questo caso il risultato è ottimo. Provate nuovamente l'applet java che si trova a questo indirizzo in rete: http://www.falstad.com/fourier/e-triangle.html



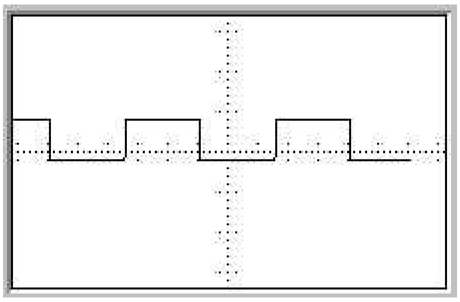
NOTE ESPLICATIVE

Un segnale si definisce **UNIPOLARE** se la sua polarità non cambia, ovvero il segnale è sempre positivo oppure sempre negativo, quindi sicuramente ha un valor medio diverso da zero.

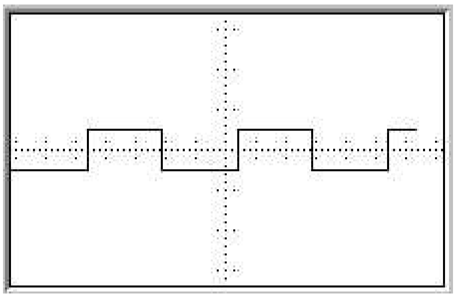




Un segnale si definisce **BIPOLARE** se la sua polarità cambia, ovvero passa da valori positivi a negativi, il valore medio del segnale può anche essere diverso da zero. Un caso particolare è quello del segnale **ALTERNATO** che è un segnale BIPOLARE con VALORE MEDIO NULLO.



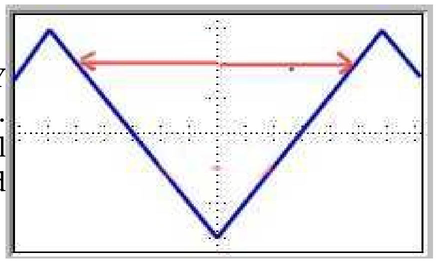
Segnale Bipolare a valor medio non nullo



Segnale Alternato ovvero Bipolare a valor medio nullo

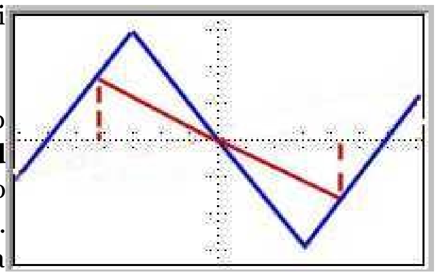
Un segnale si può anche esprimere come somma di una serie di termini sia pari che dispari

$$\mathbf{V_{(t)} = Vp_{(t)} + Vd_{(t)}}$$



Un segnale si definisce **pari** se è simmetrico rispetto all'asse Y (verticale). In questo caso contiene solo i termini **Vp** della serie. Come si vede dal grafico a lato il punto al tempo **t** oppure al tempo **-t** hanno il solito valore. Un segnale co-sinusoidale ad esempio è di tipo pari (provate a disegnarlo).

Esprimendosi in altro modo il segnale si definisce pari quando si ha che: $\mathbf{V_{(t)} = V_{(-t)}}$



Un segnale si definisce invece dispari se è simmetrico rispetto all'origine degli assi. In questo caso contiene solo i termini **Vd** della serie. Come si vede dal grafico il punto al tempo **t** ha lo stesso valore del punto al tempo **-t**, però con polarità invertita. Un segnale sinusoidale ad esempio è di tipo dispari (provate a disegnare anche questo).

Esprimendosi in altro modo il segnale si definisce pari quando si ha che: $\mathbf{V_{(-t)} = -V_{(t)}}$

Un segnale che non rispetta nessuna di queste due simmetrie non è quindi né pari né dispari e contiene perciò entrambi i termini della serie, **Vp** e **Vd**.