12/02/09 ***IPSIA "Antonio Pacinotti" - Pistoia***

Risposta RLC serie

Analisi nel dominio di Laplace

Laboratorio di Sistemi

Classe IV - Risposta dei circuiti: RLC serie con gradino di tensione

Gualtiero Lapini

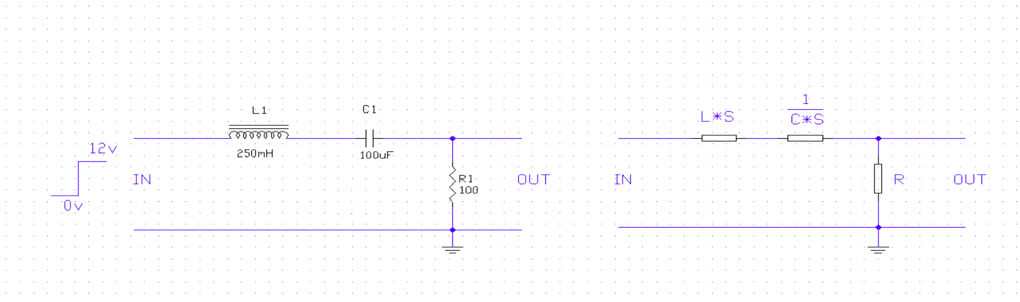
Risposta RLC serie

Analisi nel dominio di Laplace

Scopo dell'esercitazione: Visualizzare l'andamento della risposta del circuito RLC serie ad un gradino di tensione. Analisi effettuata nel dominio di Laplace.

Procedimento: Verificare in Pspice la simulazione Transient utilizzando modelli di Laplace per confrontare i risultati già visti in precedenza, nel dominio del tempo, in un'altra lezione.

Vogliamo verificare la risposta di un circuito RLC serie ad una eccitazione in ingresso rappresentata da un gradino di tensione. Abbiamo già visto a suo tempo il comportamento di questo tipo di circuito utilizzando però modelli "reali" di componenti, analizzandolo nel dominio del tempo. L'analisi che effettueremo questa volta sarà comunque nel dominio del tempo (transient), però utilizzando il modello circuitale secondo Laplace.



Partendo dallo schema, sostituiamo i componenti con il modello equivalente in Laplace, LS per le induttanze, 1/CS per le capacità ed R per le resistenze.
Ricaviamo quindi la tensione di uscita:

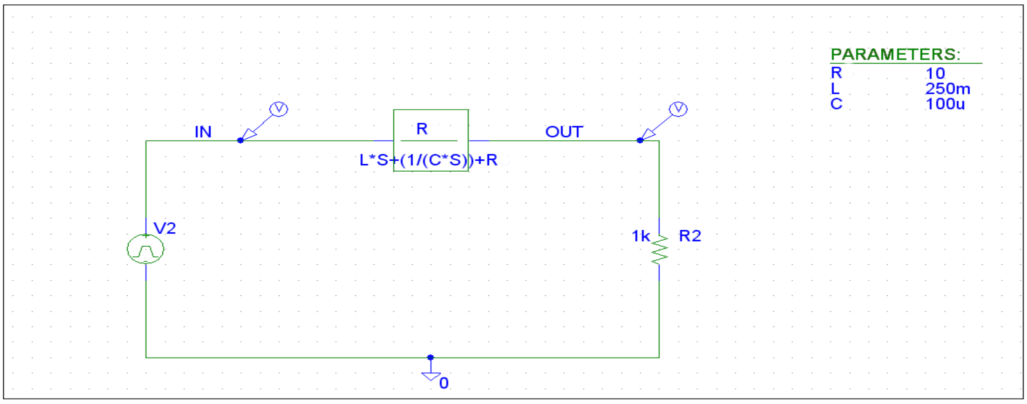
$$Vout_{[S]} = \frac{Vin_{[S]}}{I} = \frac{Vin_{[S]}}{(L \cdot S) + \frac{1}{C \cdot S} + R} \cdot R$$

separando però la tensione di ingresso dal resto dei componenti riesco a vedere la funzione di trasferimento del circuito preso nel suo complesso.

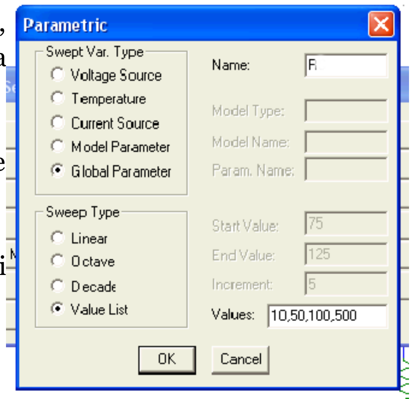
$Vout_{[S]} = Vin_{[S]} \cdot G_{[S]}$ Dove si ha che $G_{[S]} = \frac{R}{(L \cdot S) + \frac{1}{C \cdot S} + R}$

disegniamo adesso con Pspice lo schema elettrico utilizzando un blocchetto circuitale che rappresenta l'intero circuito, utilizzando il componente LAPLACE ed assegnando opportunamente al numeratore ed al denominatore i corretti valori.
Per semplificare la scrittura del tutto parametrizziamo tutti e tre i componenti, oltre ad R aggiungiamo nella tabellina PARAMETERS (di cui abbiamo già conosciuto l'utilizzo) anche l'induttanza L e la capacità C. Ho modificato il nome del primo parametro in R anziché RS per evitare possibili fraintendimenti con R*S, cioè come R moltiplicato per la variabile S in Laplace.

Vediamo quindi lo schema risultante, senza preoccuparci troppo del fatto che il numeratore della frazione fuoriesca dal riquadro del simbolo. Stiamo attenti ad utilizzare correttamente le parentesi tonde per stabilire la priorità di esecuzione tra la frazione e la moltiplicazione.



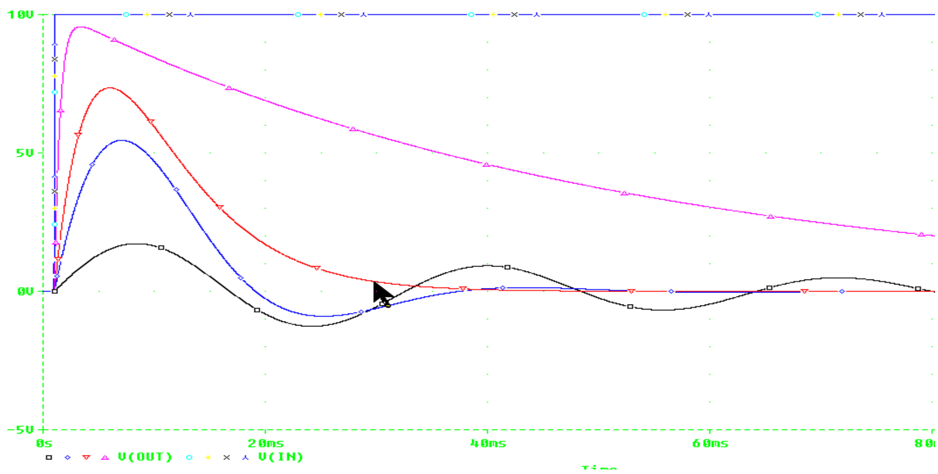
Impostiamo l'analisi di tipo transient ed attiviamo anche l'analisi parametrica, impostando la medesima lista di valori che avevamo utilizzando nell'altra lezione.



Se tutto è stato impostato correttamente dovrei ottenere le stesse identiche curve ottenute la volta precedente.

Questo significa che i due modelli, il modello "elettrico" con i componenti tradizionali ed il modello "Laplace", sono equivalenti.

Vediamo quindi il risultato:



Se lo confrontiamo con il grafico della precedente lezione vedremo che è identico, ovvero i due circuiti, anche se disegnati con modelli diversi sono in realtà diversi fra loro.

Verifichiamo adesso un'altra cosa con il modello di Laplace.

Proviamo con valori di R diversi e precisamente corrispondenti ad un valore di $\zeta = 1$, $\zeta < 1$ e $\zeta > 1$, cioè con valori di ζ (zeta che si pronuncia zita) corrispondenti ad un circuito con comportamento instabile (risposta con oscillazione) oppure smorzato.

Ricaviamo l'equazione corrispondente alla tensione di uscita del nostro sistema, alimentandolo con un gradino di tensione di 10 v, ricordiamo che un gradino di tensione ha la sua trasformata di Laplace del tipo:

$$Vin_{[S]}=\frac{E}{S}=\frac{10}{S}$$

applicando alla funzione di trasferimento si ottiene

$$Vout_{[S]}=\frac{10}{S}\cdot\frac{R}{(L\cdot S)+\frac{1}{C\cdot S}+R}=\frac{10\cdot R}{(L\cdot S^2)+\frac{S}{C\cdot S}+R\cdot S}=\frac{10\cdot R}{L\cdot S^2+\frac{1}{C}+R\cdot S}=\frac{10\cdot R}{\frac{C\cdot L\cdot S^2+1+R\cdot C\cdot S}{C}}$$

$$Vout_{[S]}=\frac{10\cdot R\cdot C}{C\cdot L\cdot S^2+R\cdot C\cdot S+1}$$

riscriviamo la stessa funzione in maniera da portare il coefficiente di S2 ad 1, questo lo dobbiamo fare in tutti modi per poter applicare poi le formule risolutive che vedremo più avanti.

$$Vout_{[S]}=\frac{\frac{10\cdot R\cdot C}{C\cdot L}}{\frac{C\cdot L\cdot S^2}{C\cdot L}+\frac{R\cdot C\cdot S}{C\cdot L}+\frac{1}{C\cdot L}}=\frac{\frac{10\cdot R}{L}}{S^2+\frac{R\cdot S}{L}+\frac{1}{C\cdot L}}$$

Questa equazione vediamo che non ha zeri (numeratore non contiene la variabile S), mentre ha due poli al denominatore (è una equazione di secondo grado). Calcoliamo adesso i poli:

Risolvendo l'equazione $S^2+\frac{R}{L}\cdot S+\frac{1}{C\cdot L}=0$ avremo che

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}=\frac{-\frac{R}{L}\pm\sqrt{(\frac{R}{L})^2-\frac{4}{C\cdot L}}}{2}$$

Questa equazione con R = 100 ohm (resistenza critica) ha due soluzioni reali e coincidenti

$$x=\frac{-400\pm\sqrt{(400)^2-4\cdot 40000}}{2}=\frac{-400\pm\sqrt{160000-160000}}{2}=\frac{-400\pm 0}{2}=-200$$

ovvero con il discriminante (la parte sotto la radice) uguale a zero si hanno due poli reali e coincidenti.

Mentre con R << 100 ohm (ad esempio 10 ohm)

$$x=\frac{-40\pm\sqrt{(40)^2-4\cdot 40000}}{2}=\frac{-40\pm\sqrt{1600-160000}}{2}=\frac{-40\pm\sqrt{-158400}}{2}=-20\pm j\,199$$

ha due soluzioni distinte con parte reale ed immaginaria, ovvero con discriminante minore di zero si hanno due poli coniugati e complessi.

Mentre con R >> 100 ohm (ad esempio 1000 ohm)

$$x=\frac{-4000\pm\sqrt{(4000)^2-4\cdot 40000}}{2}=\frac{-4000\pm\sqrt{15840000}}{2}=\frac{-4000\pm 3980}{2}=-3990,-10$$

ha due soluzioni reali e distinte x_1 = -10 ed x_2 = -3990, ovvero con discriminante maggiore di zero si hanno due poli reali.

Partiamo con l'analisi di quest'ultimo caso (R >> 100 ohm ossia R = 1000 ohm).

Il sistema è stabile, visto che ha due poli reali distinti ed entrambi negativi, ricordiamo che i sistemi instabili hanno almeno un polo reale positivo.

Il nostro sistema si presenta con una soluzione di questo tipo (ci stiamo riferendo alla tensione di uscita):

$$Vout_{[S]}=\frac{40000}{S^2+4000\cdot S+40000}$$

che si può esprimere anche in quest'altra forma

$$Vout_{[S]}=\frac{K}{(S-a)\cdot(S-b)}$$

sostituiamo alle costanti **a** e **b** il valore necessario per ottenere i due poli, di cui abbiamo già calcolato i risultati che soddisfano l'equazione di secondo grado. Per ottenere di *annullare* i due membri al denominatore occorre quindi che **a** e **b**, rispettivamente assumano il valore contrario a $\mathbf{x_1}$ ed $\mathbf{x_2}$.

$$Vout_{[S]}=\frac{40000}{(S+10)\cdot(S+3990)}$$

Tramite le regole di ***Heaviside*** scomponiamo ulteriormente questa equazione per riscriverla in un'altra forma, composta da due membri separati.

$$Vout_{[S]}=\frac{40000}{(S+10)\cdot(S+3990)}=\frac{A}{S+10}+\frac{B}{S+3990}=\frac{\frac{40000}{3980}}{S+10}+\frac{\frac{-40000}{3980}}{S+3990}=\frac{10{,}05}{S+10}+\frac{-10{,}05}{S+3990}$$

Tornando nel dominio del tempo, ovvero eseguendo l'antitrasformata di questa funzione. Ricordiamoci che l'antitrasformata di una funzione di questo tipo

$$Vout_{[S]}=\frac{K}{(S+a)} \quad \text{equivale a} \quad Vout_{[t]}=K\cdot e^{-a\cdot t}$$

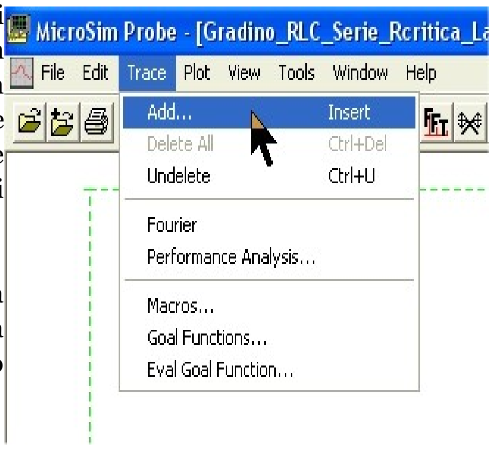
avremo una soluzione come questa

$$Vout_{[t]}=10{,}05\cdot e^{-10\cdot t}-10{,}05\cdot e^{-3990\cdot t}$$

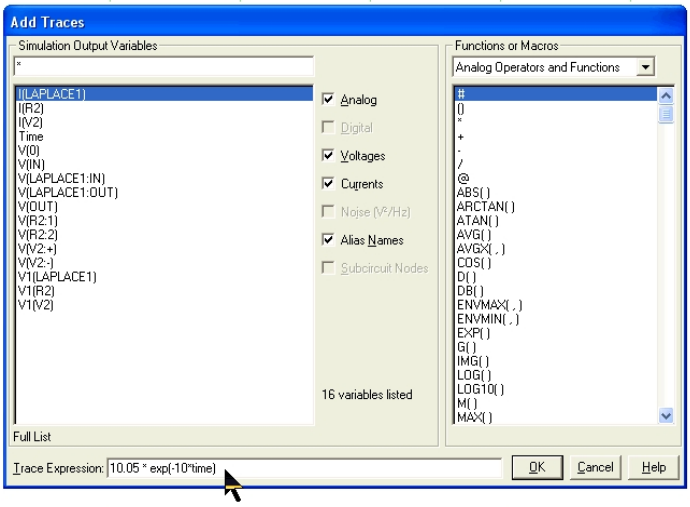
ovvero due componenti, entrambe tendenti a zero, di cui uno con partenza da un livello di tensione positiva e che va lentamente a zero (coefficiente 10 sull'esponente), mentre un'altra con partenza da un livello negativo di tensione e che va molto velocemente a zero (coefficiente 3990 sull'esponente).

All'istante t=0 entrambi i valori sono identici ma invertiti di segno, per cui la tensione di uscita parte da zero volt, si evolve verso un valore positivo ed in seguito torna a scendere più lentamente verso lo zero.

Analizziamo adesso, separatamente, l'apporto dei due addendi alla tensione di uscita. Utilizziamo a questo scopo un programma che già abbiamo ampiamente utilizzato, però in un modo diverso dal solito. Dopo aver lanciato la simulazione dell'esercizio precedente (ma andrebbe bene una simulazione qualsiasi) con Pspice, abbiamo il risultato rappresentato su di un grafico temporale (usando ovviamente l'analisi Transient).



Cancelliamo adesso da Probe tutti i segnali selezionando una alla volta le scritte in basso nello schermo (diventano rosse una volta selezionate) ed eliminandole con il tasto CANC. Possiamo fare la stessa cosa da menù con la sequenza Trace → Delete All.



Ci ritroviamo quindi con lo schermo del grafico completamente vuoto, premiamo il tasto INS per "inserire" un nuovo segnale (oppure da menù con Trace → Add).

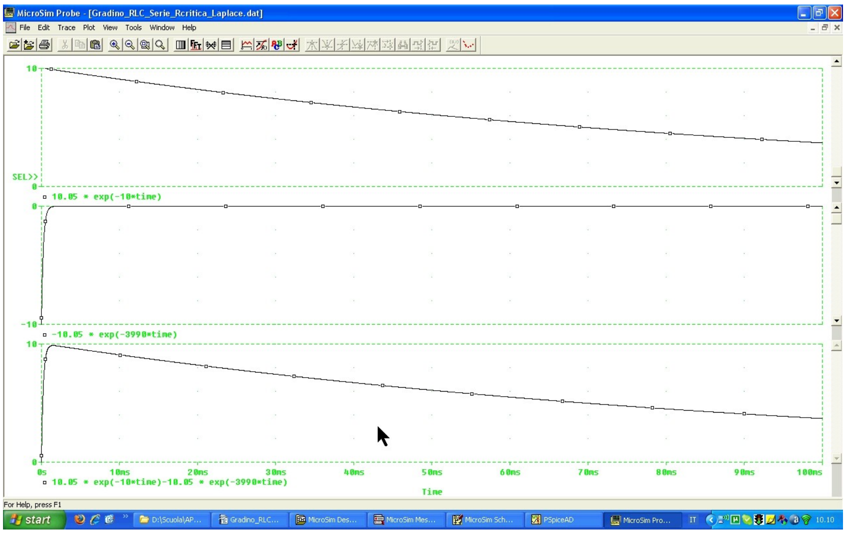
Si apre una dialog-box da cui si possono scegliere, nella parte sinistra, i segnali risultanti dai calcoli di Pspice, ad esempio scegliamo il segnale di ingresso contrassegnato dalla sigla V(IN).

Aggiungiamo un'altra traccia a questo grafico, questa volta però non la sceglieremo tra quelle già *"pronte"* risultanti dai calcoli di Pspice, la creiamo invece scrivendo la formula matematica, inseriamo quindi il primo membro della funzione di Vout[t].

Scriviamo la formula nella forma *"in linea"* come è richiesto dal software di Pspice, vediamo nell'immagine l'esempio, dobbiamo utilizzare **EXP()** per effettuare l'elevazione a potenza con base **e**, mentre dobbiamo utilizzare la voce **time** come variabile dell'asse x, come si può vedere dalla scritta in basso sul grafico. Possiamo utilizzare anche la parte destra della dialog-box per inserire le varie funzioni e/o variabili.

Possiamo suddividere lo schermo in varie zone, tramite il comando Plot → Add Plot da menù ed inseriamo le tracce in zone diverse.

Vediamo quindi il contributo di questo primo membro visualizzato sul grafico in alto, aggiungiamo un'altra traccia corrispondente al secondo membro nel grafico centrale, vediamo quindi i due contributi sovrapposti sul grafico. Aggiungiamo quindi una terza traccia che non sarà altro che la somma delle due precedenti e vediamo infine il risultato finale sul grafico.



Il grafico della tensione di uscita nel tempo è, naturalmente, identico sia come forma che come valori al risultato che avevamo ottenuto con le precedenti simulazioni (sempre riguardo al valore di 1000 ohm), chiaramente potremmo anche ripetere gli stessi calcoli e prove anche con altri valori di R ma, come è facilmente comprensibile, i risultati saranno identici a quelli visti in precedenza.

Approfondimento:

Come ulteriore verifica provate comunque a ripetere i calcoli con R=10 ohm ed R=100 ohm.

In un'appendice a questi appunti saranno sviluppati i calcoli relativi a questi due ulteriori casi, però non guardate subito la soluzione...